در باره الکترودینامیک اجسام متحرک

آ. انیشتن

۳۰ ژوئن ۱۹۰۵

معلوم شده است که الکترودینامیک ماکسول، آنگونه که امروزه در نظر گرفته می شود، وقتی درباره اجسام متحرک بکار برده می شود، به عدم تقارنهایی منجر میشود که به نظر نمی رسد ذاتی پدیده ها باشد. برای مثال اثر متقابل الکترودینامیکی یک آهنربا و یک رسانا را در نظر بگیرید. پدیده قابل مشاهده در اینجا فقط به حرکت نسبی آهنربا و رسانا بستگی دارد در حالی که نگاه معمول و مرسوم یک تمایز جدی قایل می شود میان دو حالت که در آن یکی از اجسام یا دیگری در حرکت باشد. چرا که اگر آهنربا در حرکت باشد و رسانا در سکون، در همسایگی آهنربا یک میدان الکتریکی دارای یک انرژی معلوم معین بوجود می آید که یک جریانی در جاهایی که اجزای رسانا واقع هستند تولید می کند. اما اگر آهنربا ساکن باشد و رسانا در حرکت، میدان الکتریکی در اطراف آهنربا ایجاد نمی شود. ولیکن در رسانا ما یک نیروی محرکه الکتریکی می یابیم، که به خودی خود متناظر با هیچ انرژیی نیست، اما این نیروی محرکه الکتریکی، با فرض تساوی حرکت نسبی در دو حالت مورد بحث، موجب یک جریان الکتریکی در همان مسیر و با همان شدت تولید شده بوسیله نیروهای الکتریکی در حالت قبل می باشد.

مثالهایی از این دست به همراه تلاشهای ناموفق جهت کشف حرکت زمین نسبت به "محیط حامل نور"، نشان می دهد که پدیده های الکترو دینامیکی همانند پدیده های مکانیکی هیچ خواصی مربوط به ایده سکون مطلق از خود نشان نمی دهند. در واقع اینها نشان می دهد که، همانگونه که قبلا برای مرتبه اول مقادیر کوچک نشان داده شده است، قوانین الکترودینامیک و اپتیک برای همه چارچوبهای مرجع که برای آنها قوانین مکانیک صادق است، معتبر می باشند. ما این حدس را (که مفهوم آن بعد از این بنام "اصل نسبیت" خوانده می شود) به صورت یک اصل موضوع در نظر می گیریم، و همچنین یک اصل موضوع دیگر نیز معرفی می کنیم، که در بادی امر با اصل پیشین ناسازگار می نماید، و آن اینکه نور همواره در خلا با یک سرعت معین c که مستقل از وضعیت حرکت جسم انتشار دهنده نور می باشد، انتشار می یابد. این دو اصل برای دستیابی به یک نظریه ساده و سازگار برای الکترودینامیک اجسام متحرک بر مبنای نظریه ماکسول در مورد اجسام ساکن، کفایت می کند. زاید بودن فرض وجود یک"اتر تابناک" از آنجا ثابت می شود که نحوه بسط مسئله در اینجا به گونه ای است که نه نیاز به یک "فضای ساکن مطلق" دارای خواص ویژه است و نه نیاز به نسبت دادن یک بردار سرعت در خلا به نقطه ای که فرایندهای الکترومغناطیسی در آن اتفاق می افتد.

مبنای بسط نظریه، مشابه همه الکترودینامیک، سینماتیک جسم صلب می باشد، زیرا احکام چنین نظریه ای الزاما با روابط میان اجسام صلب (دستگاههای مختصات)، ساعتها و فرایندهای الکترومغناطیسی سروکار دارد. دقت ناکافی در این امر ریشه مشکلاتی است که الکترودینامیک اجسام متحرک در حال حاضر با آن روبرو است.

۱. بخش سینماتیک

§ ۱. تعریف همزمانی

یک دستگاه مختصات که در آن معادلات نیوتن صادق است را در نظر می گیریم. به منظور ارایه هرچه دقیقتر مطلب و تمایز این دستگاه مختصات با بقیه دستگاههای مختصاتی که پس از این معرفی می شود، ما این دستگاه را "دستگاه ساکن" می نامیم.

اگر یک نقطه مادی نسبت به این دستگاه ساکن باشد، موقعیت آن می تواند نسبت به آن دستگاه بوسیله بکارگیری استانداردهای صلب اندازه گیری و روشهای هندسه اقلیدسی تعیین شود، و در قالب مختصات دکارتی بیان شود.

اگر ما بخواهیم حرکت یک نقطه مادی را توصیف کنیم، مقادیر مختصات آنرا به صورت تابعی از زمان بدست می دهیم. اکنون باید بدقت توجه کنیم که یک توصیف ریاضی از این دست فاقد معنای فیزیکی میباشد مگر آنکه ما در مورد آنچه که از کلمه "زمان" می فهمیم ابهام نداشته باشیم. ما باید توجه کنیم که همه احکامی که ما بیان می کنیم و در آنها زمان به قسمی دخالت دارد، همواره احکامی هستند درباره پدیده های همزمان. برای مثال اگر من بگویم که "آن قطار در ساعت ۷ به اینجا می رسد"، منظور من چیزی شبیه به این است: "قرار گرفتن عقربه کوچک ساعت من روی ۷ و رسیدن قطار پدیده های همزمان هستند." [۱]

ممکن است به نظر برسد که تمام مشکلات تعریف "زمان" با جایگزینی عبارت "موقعیت عقربه کوچک ساعت من" به جای "زمان" رفع می شود. و در واقع چنین تعریفی برای وقتی که ما تعریف زمان را منحصرا برای مکانی که ساعت در آن قرار دارد مد نظر داریم، رضایت بخش می باشد، اما در هنگامی که ما باید رابطه زمانی زنجیره ای از پدیده هایی را که در مکانهای مختلف اتفاق افتاده است، یا به عبارت دیگر، هنگامی که باید زمانهای پدیده های حادث در مکانهای دور از ساعت را ارزش یابی کنیم، این تعریف دیگر رضایت بخش نیست.

البته شاید ما خودمان را با مقادیر زمانی محاسبه شده بوسیله یک ناظر مستقر در مبدا مختصات و مجهز به ساعت که موقعیتهای متناظر عقربه های ساعت را با سیگنالهای نوری صادر شده از هر پدیده که از میان خلا به او می رسند، ثبت می کند، قانع کنیم. اما همانگونه که از تجربه می دانیم، این نحوه ثبت [زمان] این اشکال را دارد که مستقل از نقطه استقرار ناظر مجهز به ساعت نمی باشد. ما با دنبال کردن خط فکری زیر به یک [روش] تعیین خیلی عملیتر می رسیم.

اگر در نقطه A از فضا یک ساعت قرار داشته باشد، یک ناظر در A می تواند مقادیر زمان پدیده های واقع در مجاورت نزدیک A را با یافتن موقعیتهای عقربه های ساعت که با این پدیده ها همزمان هستند، بیابد. اگر در نقطه B از فضا یک ساعت دیگر که از هر نظر مشابه ساعت در A می باشد قرار داشته باشد، برای یک ناظر در B یافتن مقادیر زمان پدیده ها در همسایگی بلافصل B، امکان پذیر می باشد. اما بدون فرض کمکی این امکان پذیر نیست که مقایسه کنیم، از

---

[۱] ما در اینجا وارد بحث در، عدم دقتی که در مفهوم همزمانی دو رویداد واقع در دو مکان بسیار نزدیک نهفته است، نمی شویم، که این مسئله فقط با انتزاع حل می شود.

نظر زمان، یک پدیده در A را با یک پدیده در B. ما تا اینجا تنها یک"زمان– A" و یک"زمان– B" را تعریف کرده ایم. ما یک"زمان" مشترک بین A و B تعریف نکرده ایم زیرا این تعریف به هیچ وجه امکان پذیر نیست مگر اینکه ما *بنا به تعریف* قرار دهیم که "زمان" مورد نیاز برای نور جهت حرکت از A به B برابر است با "زمان" مورد نیاز برای حرکت از B به A. فرض کنید یک شعاع نور در "زمان– A"، t_A، از A به سمت B ساطع شود، فرض کنید این نور در "زمان– B"، t_B، در B به سمت A منعکس شود و مجددا در "زمان– A"، $\acute{t}_A$ به A برسد.

مطابق با تعریف، دو ساعت با هم همنوا هستند اگر

$$t_B - t_A = \acute{t}_A - t_B$$

ما فرض می کنیم که این تعریف از همنوایی بدون تناقض بوده و برای هر تعداد نقطه قابل اعمال است؛ و نیز روابط زیر در گستره جهانی معتبرند:

۱. اگر ساعت در B با ساعت در A همنوا باشد، ساعت در A هم با ساعت در B همنوا است.

۲. اگر ساعت در A با ساعت در B و نیز با ساعت در C همنوا باشد، ساعتهای در B و C با هم همنوا هستند.

بنابراین ما به کمک آزمایشات فیزیکیِ تصوریِ مشخص، واضح ساختیم آنچه را که از، ساعتهای همنوای ساکن در نقاط مختلف، مورد نظر است، و طبیعتا تعریف "همزمانی" یا "همنوایی" و "زمان" را بدست آورده ایم. "زمان" یک پدیده آن چیزی است که توسط یک ساعت واقع در مکان پدیده به طور همزمان با آن پدیده داده می شود، این ساعت واقع در مکان پدیده با [هر] ساعتِ ساکنِ معین، برای همه محاسبات زمانی، همنوا است.

موافق با تجربه، ما همچنین فرض می کنیم که مقدار

$$\frac{2AB}{\acute{t}_A - t_A} = c,$$

به عنوان یک ثابت جهانی، سرعت نور در خلا می باشد.

ضروریست که زمان بوسیله ساعتهای ساکن در دستگاه [مختصات] ساکن تعریف شود، و این زمان تعریف شده که اکنون مناسب دستگاه [مختصات] ساکن می باشد را "زمان دستگاه [مختصات] ساکن" می نامیم.

§ ۲. در باره نسبیت طولها و زمانها

آنچه در زیر می آید حاصل تعمق در اصل نسبیت و اصل ثبات سرعت نور است. ما این دو اصل را به صورت زیر تعریف می کنیم:

۱. قوانینی که مطابق با آنها حالت سیستم های فیزیکی تغییر می کند، تاثیر نمی پذیرند، اگر این تغییرات حالت با ارجاع به این یا آن دستگاه مختصات دارای حرکت انتقالی یکنواخت بدست آید.

۲. هر شعاع نور در دستگاه مختصات "ساکن" با سرعت مشخص c حرکت می کند، چه شعاع [نور] از یک جسم ساکن ساطع شود و چه از یک جسم متحرک. بنابراین

$$\text{سرعت [نور]} = \frac{\text{[طول] مسیر نور}}{\text{بازه زمانی}}$$

که در آن بازه زمانی باید مطابق تعریف در § ۱ تعیین شود.

فرض کنیم یک میله صلب ساکن داده شده باشد، فرض کنید طول آن که با یک میله اندازه گیری که آن هم ساکن است l باشد. حالا در نظر بگیرید که به میله که محور آن در امتداد محور x دستگاه مختصاتِ ساکن می باشد، یک حرکت یکنواخت انتقال موازی، با سرعت v، در امتداد محور x، در جهت افزایش x، داده شود. ما اکنون به دنبال طول میله متحرک هستیم، و یافتن این طول را در دو حالت زیر در نظر می گیریم:

(الف) ناظر به همراه میله اندازه گیری و میله ای که باید اندازه گیری شود حرکت می کند، و طول میله را مستقیما با روی هم گذاری میله اندازه گیری، دقیقا به همان صورتی که اگر هر سه ساکن بودند، اندازه می گیرد.

(ب) به وسیله ساعتهای ساکنِ نصب شده در دستگاه [مختصات] ساکن که مطابق § ۱ همنوا شده اند، ناظر باید بیابد که دو نقطه انتهایی میله ای که باید اندازه گیری شود، در یک زمان معین، در چه نقاطی از دستگاه [مختصات] ساکن قرار می گیرند. فاصله بین این دو نقطه که با میله اندازه گیری قبلا تهیه شده، که در این حالت ساکن است، اندازه گیری می شود نیز یک طول است که می تواند به عنوان "طول میله" انتخاب شود.

مطابق با اصل نسبیت، طول بدست آمده در حالت (الف)، که ما آن را "طول میله در دستگاه متحرک" می نامیم، باید با طول l میله ساکن برابر باشد.

طول بدست آمده در حالت (ب) را ما "طول میله (متحرک) در دستگاه ساکن" می نامیم. ما این را بر مبنای دو اصل خویش محاسبه خواهیم کرد و خواهیم دید که با l متفاوت است.

سینماتیکِ رایج به طور ضمنی فرض می کند که طولهای محاسبه شده در این دو حالت دقیقا برابرند، یا به عبارت دیگر، یک جسم صلب متحرک در آنِ t، از جنبه های هندسی، می تواند کاملا جایگزین شود با *همان* جسم که در یک موقعیت معین *ساکن* است.

در ادامه، فرض می کنیم در دو انتهای A و B میله ساعتهایی قرار گرفته اند که با ساعتهای دستگاه ساکن همنوا هستند، یعنی زمانهایی که نشان می دهند در هر لحظه با "زمان دستگاه ساکن"، در هر مکانی که این ساعتها عبور می کنند، منطبق است. این ساعتها بنابراین " همنوا در دستگاه ساکن" هستند.

همچنین فرض می کنیم که همراه هریک از این ساعتها یک ناظر متحرک هست و این ناظرها معیار معرفی شده در

§ ۱ را به این دو ساعت برای همنوا کردن آنها اعمال می کنند. فرض کنید یک شعاع نور در زمان[۲] t_A، از [نقطه] A ساطع شود، فرض کنید این شعاع در [نقطه] B در زمان t_B منعکس شود، و مجددا در زمان t'_A به [نقطه] A برسد. با در نظر گرفتن اصل ثبات سرعت نور در می یابیم که

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c+v} \text{ و } t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c-v}$$

که در آن r_{AB} طول میله متحرک، اندازه گیری شده در دستگاه ساکن، میباشد. بنابراین ناظرهای حرکت کننده با میله درمی یابند که دو ساعت همنوا نبودند، در حالیکه ناظرهای دستگاه ساکن ادعا خواهند کرد که ساعتها همنوا هستند.

لذا ما می بینیم که ما نمی توانیم هیچ معنی *مطلقی* را به مفهوم همزمانی نسبت دهیم جز اینکه دو رویداد که از یک دستگاه مختصات مشاهده شده اند و همزمان اند، هنگامی که از یک دستگاه دیگری که نسبت به آن دستگاه [قبل] متحرک است ملاحظه شود، نمی تواند به صورت رویدادهای همزمان در نظر گرفته شود.

§ ۳. نظریه تبدیل مختصات و زمانها از یک دستگاه ساکن به دستگاه دیگری که نسبت به اولی دارای حرکتِ یکنواختِ انتقالی است

در فضای "ساکن" دو دستگاه مختصات در نظر بگیریم، یعنی دو دستگاه، هر یک متشکل از سه راستای مادی صلب، متعامد به یکدیگر و خارج شده از یک نقطه. فرض کنیم محورهای X از دو دستگاه بر هم منطبق باشند و محورهای Y و Z به ترتیب با هم موازی باشند. فرض کنیم هر دستگاه مجهز به یک میله اندازه گیری صلب و تعدادی ساعت باشد و فرض کنیم دو میله اندازه گیری و همچنین همه ساعتهای دو دستگاه از هر نظر مشابه باشند.

اکنون فرض کنیم به مبدا یکی از دستگاهها (k)، یک سرعت ثابت v در جهت افزایش [محور] x دستگاه دیگر (K)، داده شود و این سرعت به محورهای مختصات، میله اندازه گیری مربوطه و ساعتها سرایت کند. بنابراین به هر زمانِ دستگاه ساکن K، یک موقعیت معین محورهای دستگاه متحرک متناظر خواهد شد، و بنابر دلایل ناشی از تقارن ما حق داریم فرض کنیم که حرکت k می تواند به گونه ای باشد که محورهای دستگاه متحرک در زمان t (منظور از این "t" همواره یک زمان در دستگاه ساکن است) موازی محورهای دستگاه ساکن باشد.

حال در نظر می گیریم که فضا در دستگاه ساکن K بوسیله میله اندازه گیری ساکن، و در دستگاه متحرک k با میله اندازه گیری که با آن حرکت می کند، اندازه گیری شود، پس ما به ترتیب مختصات x, y, z و ξ, η, ζ را داریم. به علاوه فرض کنیم زمان t دستگاه ساکن برای همه نقاط وابسته به آن که در آنها ساعتها واقع شده اند، بوسیله سیگنالهای نور به روش بیان شده در § ۱، محاسبه شوند؛ به طور مشابه زمان τ دستگاه متحرک برای همه نقاط دستگاه متحرک که در آنها ساعتهای ساکنِ نسبتِ به این دستگاه واقع شده اند با به کار بردن روش داده شده در § ۱، سیگنالهای نور میان نقاطی که این ساعتها در آنها واقع شده اند، محاسبه شوند.

---

[۲] "زمان" در اینجا بیانگر "زمان دستگاه ساکن" و همچنین "موقعیت عقربه های ساعت متحرک مستقر در مکان مورد بحث" می باشد.

به هر سیستم مقادیر x, y, z, t که مکان و زمان یک پدیده را در دستگاه ساکن به طور کامل معین می کند، یک سیستم مقادیر ξ, η, ζ, τ وابسته می شود که آن پدیده را نسبت به دستگاه k تعیین می کند، و هدف ما اکنون یافتن دستگاه معادلات مرتبط کننده این مقادیر می باشد.

در ابتدا واضح است که به دلیل خواص همگنی، که ما فضا و زمان را بدان متصف می کنیم، معادلات باید *خطی* باشند.

اگر قرار دهیم $x = \acute{x} - vt$، واضح است که یک نقطهِ ساکن در دستگاه k باید سیستم مقادیر $\acute{x}, y, z$ را، مستقل از زمان داشته باشد. ما ابتدا τ را به صورت یک تابعی از $\acute{x}, y, z$ و t، تعریف می کنیم. برای این منظور، معادلات ما باید تصریح کند که τ چیزی جز خلاصه داده های ساعتهای ساکن در دستگاه k نیست، که مطابق با دستور داده شده در § ۱ همنوا شده اند.

در نظر بگیرید که از مبدا دستگاه k یک شعاع نور در زمان τ_0 در راستای محور X به سمت $\acute{x}$، ساطع شود، و در زمان τ_1 از آنجا به سمت مبدا مختصات منعکس شود، در زمان τ_2 به مبدا برسد؛ لذا باید داشته باشیم $\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$، یا با وارد کردن آرگومانهای تابع τ و به کاربردن اصل ثبات سرعت نور در دستگاه ساکن:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,t + \frac{\acute{x}}{c-v} + \frac{\acute{x}}{c+v}\right)\right] = \tau\left(\acute{x},0,0,t + \frac{\acute{x}}{c-v}\right)$$

لذا اگر $\acute{x}$ بی نهایت کوچک باشد،

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c-v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial \acute{x}} + \frac{1}{c-v}\frac{\partial \tau}{\partial t}$$

یا

$$\frac{\partial \tau}{\partial \acute{x}} + \frac{v}{c^2 - v^2}\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$$

باید توجه داشت که ما می توانستیم به جای مبدا مختصات، هر نقطه دیگری را به عنوان نقطه ابتدای شعاع [نور] انتخاب کنیم، و معادلاتی که هم اکنون بدست آمد برای همه مقادیر $\acute{x}, y, z$ معتبر می بود.

یک بررسی مشابه، در مورد محورهای Y و Z، با در نظر داشتن اینکه نور همواره در راستای این محورها با سرعت $\sqrt{c^2 - v^2}$ منتشر می شود، نتیجه می دهد

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

از آنجا که τ یک تابع *خطی* است، از این معادلات نتیجه می شود که

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}\acute{x}\right)$$

که در آن a یک تابع، $\phi(v)$، و فعلا نامعلوم است، و به جهت اختصار فرض شده است که در مبدا k، $\tau = 0$ است وقتی $t = 0$.

با کمک این نتیجه ما مقادیر ξ, η, ζ را به آسانی محاسبه می کنیم، با اعمال این مطلب در معادلات، که نور هنگامی که اندازه گیری در دستگاه متحرک باشد نیز با سرعت c منتشر می شود (همانگونه که اصل ثبات سرعت نور به همراه اصل نسبیت الزام می کنند). برای یک شعاع نور ساطع شده در زمان $\tau = 0$ در جهت افزایش ξ داریم

$$\xi = c\tau \text{ یا } \xi = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}\acute{x}\right)$$

اما این شعاع، هنگامی که از دستگاه ساکن اندازه گیری شود، باسرعت $c - v$ نسبت به نقطه شروع k حرکت می کند به طوری که

$$\frac{\acute{x}}{c - v} = t$$

با قرار دادن این مقدار t در معادله ξ، داریم

$$\xi = a\frac{c^2}{c^2 - v^2}\acute{x}$$

با روشی مشابه با در نظر گرفتن شعاع های متحرک در راستای دو محور دیگر، در می یابیم

$$\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}\acute{x}\right)$$

اما

$$\frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = t, \acute{x} = 0$$

لذا

$$\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}y \;\; \zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}z$$

با جایگزاری مقدار $\acute{x}$، داریم

$$\tau = \phi(v)\beta(t - vx/c^2)$$

$$\xi = \phi(v)\beta(x - vt)$$

$$\eta = \phi(v)y$$

$$\zeta = \phi(v)z$$

که درآن

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

و ϕ همچنان یک تابع مجهول از v می باشد. اگر هیچ فرضی در مورد وضعیت اولیه دستگاه متحرک و نقطه صفر τ نشود، یک مقدار ثابت باید به سمت راست هریک از این معادلات اضافه شود.

ما اکنون باید ثابت کنیم که هر شعاع نور، اندازه گیری شده در دستگاه متحرک، اگر همانگونه که فرض کردیم با سرعت c در دستگاه ساکن منتشر شود، با سرعت c منتشر می شود؛ زیرا ما هنوز نشان نداده ایم که اصل ثبات سرعت نور با اصل نسبیت سازگار است.

فرض کنید در زمان $t = \tau = 0$، هنگامی که مبدا مختصات هر دو دستگاه مشترک [برهم منطبق] است، یک موج کروی از آنجا [مبدا مشترک] ساطع شود و در دستگاه K با سرعت c منتشر شود. اگر (x, y, z) نقطه ای باشد که این موج به آن رسیده باشد، داریم

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

با تبدیل این معادله به کمک معادلات تبدیلی که به دست آورده ایم، پس از یک محاسبه ساده، بدست می آوریم

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2 \tau^2$$

بنابراین موج مورد نظر هنگامی که از دستگاه متحرک مشاهده شود، از یک موج کروی با سرعت انتشار c، چیزی کم ندارد. این نشان می دهد که دو اصل بنیادی ما سازگارند.

در معادلات تبدیلی که بدست آمده یک تابع مجهول ϕ از v وارد می شود که اکنون آنرا محاسبه می کنیم.

برای این منظور ما یک دستگاه مختصات ثالث K' معرفی می کنیم که نسبت به دستگاه k در وضعیت حرکت انتقالی موازی، موازی با محور Ξ، می باشد به طوری که مبدا مختصات دستگاه K' با سرعت $-v$ روی محور Ξ حرکت می کند. فرض کنید در زمان $t = 0$ هر سه مبدا بر هم منطبق باشند، و وقتی که $t = x = y = z = 0$، زمان $\acute{t}$ مربوط به دستگاه K'، صفر باشد. ما مختصات اندازه گیری شده در دستگاه K' را $\acute{x}, \acute{y}, \acute{z}$، می نامیم و با دو بار به کاربردن معادلات تبدیلمان بدست می آوریم

$$\acute{t} = \phi(-v)\beta(-v)(\tau + v\xi/c^2) = \phi(v)\phi(-v)t$$
$$\acute{x} = \phi(-v)\beta(-v)(\xi + v\tau) = \phi(v)\phi(-v)x$$
$$\acute{y} = \phi(-v)\eta$$
$$\acute{z} = \phi(-v)\zeta$$

چون روابط میان $\acute{x}, \acute{y}, \acute{z}$ و x, y, z شامل زمان t نیست، دستگاههای K و K' نسبت به هم در سکونند، و واضح است که تبدیل از K به K' باید تبدیل همانند باشد. لذا

$$\phi(v)\phi(-v) = 1$$

ما اکنون مفهوم $\phi(v)$ را بررسی می کنیم. توجهمان را به آن قسمت از محور H از دستگاه k معطوف می کنیم که میان $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ و $\xi = 0, \eta = l, \zeta = 0$ قرار دارد. این قسمت از محور H یک میله متحرک در جهت عمود بر محورش با سرعت v نسبت به دستگاه K می باشد. انتهاهای آن در K مختصات

$$x_1 = vt, y_1 = \frac{l}{\phi(v)}, z_1 = 0$$

و

$$x_2 = vt, y_2 = 0, z_2 = 0$$

را دارد، بنابر این طول میله اندازه گیری شده در K، $l/\phi(v)$ می باشد؛ و این، مفهوم تابع $\phi(v)$ را به ما می دهد. اکنون بنا بر دلایل ناشی از تقارن بدیهی است که طول یک میله مشخص که در جهت عمود بر محورش حرکت می کند، اندازه گیری شده از دستگاه ساکن، می بایست فقط به سرعت بستگی داشته باشد و نه به سمت حرکت یا احساس حرکت. بنابراین اگر v با $-v$ تعویض شود، طول میله متحرک اندازه گیری شده در دستگاه ساکن تغییر نمی کند. لذا $l/\phi(v) = l/\phi(-v)$، یا

$$\phi(v) = \phi(-v)$$

از این رابطه و رابطه قبلا به دست آمده نتیجه می شود که $\phi(v) = 1$، که در این صورت معادلات تبدیل به دست آمده می شود

$$\tau = \beta(t - vx/c^2)$$

$$\xi = \beta(x - vt)$$

$$\eta = y$$

$$\zeta = z$$

که در آن

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

§ ٤. مفهوم فیزیکی معادلات بدست آمده در رابطه با اجسام صلب متحرک و ساعتهای متحرک

یک کره صلب[۳] به شعاع R که نسبت به دستگاه متحرک k در سکون است و مرکزش در مبدا مختصات k قرار دارد را مجسم می کنیم. معادله سطح این کره که نسبت به دستگاه K با سرعت v حرکت می کند برابر است با

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

---

[۳] یعنی یک جسمی که وقتی در حال سکون بررسی شود دارای شکل کروی است.

معادله این سطح با x, y, z در زمان $t = 0$ برابر است با

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

بنابراین یک جسم صلب که با اندازه گیری در وضعیت سکون شکل کره دارد، در وضعیت حرکت، مشاهده شده از یک دستگاه ساکن، شکل یک بیضوی را دارد با محورهای

$$R\sqrt{1 - v^2/c^2}\, , R, R$$

لذا در حالی که ابعاد Y و Z کره (و بنابراین هر جسم صلب با هر شکلی) با حرکت دست نخورده به نظر می رسد، بعد X با نسبت $1:\sqrt{1 - v^2/c^2}$ کوتاه شده به نظر می رسد، یعنی مقدار بزرگتر v، مقدار بیشتر کوتاه شده گی را می دهد. برای $v = c$، همه اجسام متحرک، مشاهده شده از دستگاه "ساکن"، منقبض می شوند به صورت یک صفحه. برای سرعتهای بزرگتر از سرعت نور، ملاحظات ما بی معنی می شود؛ لذا ما باید در آنچه در پی می آید بیابیم که سرعت نور در نظریه ما نقش سرعت بینهایت بزرگ را بازی می کند.

واضح است که همین نتایج در مورد اجسام ساکن در دستگاه "ساکن" که از یک دستگاه با حرکت یکنواخت مشاهده می شوند، صدق می کند.

در ادامه در نظر می گیریم که یکی از ساعتهای واجد شرایط برای نشان دادن زمان t وقتی که نسبت به دستگاه ساکن در سکون است و نشان دادن زمان τ وقتی که نسبت به دستگاه متحرک در حال سکون است، در مبدا مختصات k قرار گرفته باشد، لذا برای نشان دادن زمان τ تنظیم شده است. نرخ این ساعت هنگامی که از دستگاه ساکن مشاهده شود چیست؟

برای مقادیر x, t و τ، مربوط به وضعیت ساعت، آشکارا داریم $x = vt$ و

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t - vx/c^2)$$

لذا

$$\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2} = t - \left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)t$$

که از آنجا نتیجه می شود که زمان نشان داده شده بوسیله ساعت (مشاهده شده در دستگاه ساکن)، با عامل $1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ثانیه بر ثانیه، یا با صرفنظر کردن از بزرگی های مرتبه چهارم و بالاتر، با عامل $\frac{1}{2}v^2/c^2$، کندتر است.

از این مطلب، نتیجه شگفت زیر استفاده می شود. اگر در نقاط A و B از K ساعتهای ساکنی باشند که با مشاهده در دستگاه ساکن همنوا باشند، و اگر ساعت قرار گرفته در A با سرعت v در راستای خط AB تا B حرکت داده شود، هنگام رسیدن به B، دو ساعت دیگر همنوا نیستند، ساعت حرکت داده شده از A تا B از ساعت دیگری که در B مانده بود به اندازه $\frac{1}{2}t\, v^2/c^2$ (تا بزرگی های مرتبه چهار و بالاتر)، عقب می افتد، t در اینجا زمان طی شده در سفر از A به B است.

بی واسطه آشکار است که این نتیجه اگر ساعت از A تا B روی خط هر چند ضلعیی حرکت کند نیز صدق می کند، همینطور اگر نقاط A و B بر هم منطبق شوند.

اگر فرض کنیم که نتیجه ثابت شده برای یک خط چند ضلعی، برای یک خط منحنی پیوسته نیز صادق است، به این نتیجه می رسیم: اگر یکی از دو ساعت همنوا در A بر یک منحنی بسته با سرعت ثابت حرکت داده شود تا به A بازگردد و سفر t ثانیه طول بکشد، آنگاه به حساب ساعتی که در A ساکن مانده، ساعت گردانده شده به گاه رسیدنش به A، $\frac{1}{2}t\,v^2/c^2$ ثانیه عقب است. لذا نتیجه می گیریم که یک ساعت در استوا باید از یک ساعت دقیقا مشابه قرارگرفته در یکی از قطبین، که از نظر شرایط دیگر یکسانند، باید مقدار خیلی کمی کندتر کار کند.

§ ۵. ترکیب سرعتها

در دستگاه k که باسرعت v در راستای محور X از دستگاه K حرکت می کند، فرض کنید که یک نقطه طبق معادلات

$$\xi = \omega_\xi \tau, \eta = \omega_\eta \tau, \zeta = 0$$

که در آن ω_ξ و ω_η ثابتند، حرکت می کند.

خواسته: حرکت نقطه نسبت به دستگاه K. اگر به کمک معادلات تبدیل بسط یافته در § ۳، مقادیر x, y, z, t را در معادلات حرکت نقطه قرار دهیم، بدست می آوریم

$$x = \frac{\omega_\xi + v}{1 + v\,\omega_\xi/c^2}t$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v\,\omega_\xi/c^2}\omega_\eta t$$

$$z = 0$$

بنابراین قانون متوازی الاضلاع سرعتها بنابر نظریه ما تا [دقت] مرتبه اول معتبر است. قرار می دهیم

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\omega^2 = {\omega_\xi}^2 + {\omega_\eta}^2$$

$$a = tan^{-1}\,\omega_\eta/\omega_\xi$$

لذا a به صورت زاویه میان سرعتهای v و ω دیده می شود. پس از یک محاسبات ساده، بدست می آوریم

$$V = \frac{\sqrt{\left(v^2 + \omega^2 + 2v\omega cos(a)\right) - (v\omega sin(a)/c)^2}}{1 + v\omega cos(a)/c^2}$$

قابل توجه است که v و ω در عبارت فوق برای سرعت برآیند به صورت متقارن ظاهر شده اند. اگر ω نیز جهت محور X را داشته باشد، بدست می آوریم

$$V = \frac{v + \omega}{1 + v\,\omega/c^2}$$

از این معادله نتیجه می شود که از ترکیب دو سرعتی که از c کوچکترند، همیشه یک سرعت کوچکتر از c برآیند می شود. زیرا اگر قرار دهیم $v = c - \kappa, \omega = c - \lambda$، κ و λ مثبت و کوچکتر از c هستند، آنگاه

$$V = c\,\frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \kappa\lambda/c} < c$$

بعلاوه نتیجه می شود که، سرعت نور، c، نمی تواند با ترکیب با یک سرعت کوچکتر از سرعت نور، تغییر کند. برای این حالت بدست می آوریم

$$V = \frac{c + \omega}{1 + \omega/c} = c$$

ما می توانستیم فرمول V را برای حالتی که v و ω هم جهتند، با ترکیب دو تبدیل مطابق § ۳، نیز بدست آوریم. اگر علاوه بر دو دستگاه K و k درنظر گرفته شده در § ۳، ما یک دستگاه مختصات k'، در حرکت موازی با k را نیز وارد کنیم که نقطه آغازین آن روی محور Ξ با سرعت ω حرکت می کند، معادلات میان مقادیر x, y, z, t و مقادیر متناظر در k' را بدست می آوریم که تفاوتشان با معادلات ظاهر شده در § ۳ فقط در اینست که جای "v" با مقدار

$$\frac{v + \omega}{1 + v\,\omega/c^2}$$

عوض شده است؛ از این مشاهده می شود که چنین تبدیلهای موازی ای، ضرورتا، تشکیل یک گروه می دهند.

اکنون ما قوانین لازم نظریه سینماتیک متناظر با دو اصلمان را استنتاج کرده ایم، و می پردازیم به نشان دادن کاربرد آنها در الکترودینامیک.

۲. بخش الکترودینامیک

§ ۶. تبدیل معادلات ماکسول-هرتز برای خلا. درباره طبیعت نیروهای محرکه واقع در یک میدان مغناطیسی در ضمن حرکت

فرض کنید معادلات ماکسول-هرتز برای خلا، در دستگاه ساکن K صدق کند، به طوریکه داشته باشیم

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}$$

که در آن (X,Y,Z) بیانگر بردار نیروی الکتریکی، و (L,M,N) بیانگر بردار نیروی مغناطیسی است.

اگر تبدیل بدست آمده در § ۳ را به این معادلات اعمال نماییم، با ارجاع فرایندهای الکترومغناطیسی به دستگاه مختصاتی که با سرعت v حرکت می کند، بدست می آوریم

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\}=\frac{\partial L}{\partial \zeta} \qquad -\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\}-\frac{\partial L}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\}-\frac{\partial X}{\partial \zeta}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\}=\frac{\partial X}{\partial \eta} \qquad -\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\}$$

که در آن

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

اکنون، اصل نسبیت لازم می آورد که اگر معادلات ماکسول-هرتز برای خلا در دستگاه K صدق می کند، در دستگاه k نیز صدق می کند؛ یعنی بردارهای نیروی الکتریکی و مغناطیسی دستگاه متحرک k، $(\acute{X},\acute{Y},\acute{Z})$ و $(\acute{L},\acute{M},\acute{N})$، که بوسیله اثرات پاندروموتیوِ شان روی جرمهای بترتیب الکتریکی و مغناطیسی تعریف می شوند، معادلات زیر را ارضا می کنند

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \acute{X}}{\partial \tau}=\frac{\partial \acute{N}}{\partial \eta}-\frac{\partial \acute{M}}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \acute{L}}{\partial \tau}=\frac{\partial \acute{Y}}{\partial \zeta}-\frac{\partial \acute{Z}}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \acute{Y}}{\partial \tau}=\frac{\partial \acute{L}}{\partial \zeta}-\frac{\partial \acute{N}}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \acute{M}}{\partial \tau}=\frac{\partial \acute{Z}}{\partial \xi}-\frac{\partial \acute{X}}{\partial \zeta}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \acute{Z}}{\partial \tau}=\frac{\partial \acute{M}}{\partial \xi}-\frac{\partial \acute{L}}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \acute{N}}{\partial \tau}=\frac{\partial \acute{X}}{\partial \eta}-\frac{\partial \acute{Y}}{\partial \xi}$$

بدیهی است که دو دستگاه معادلات یافت شده برای دستگاه k باید دقیقا یک چیز را بیان کنند، زیرا هر دو دستگاه معادلات با معادلات ماکسول-هرتز در دستگاه K هم ارزند. بعلاوه، چون معادلات دو دستگاه، به استثنای نمادهای

سیمبلها، باهم انطباق دارند، نتیجه می شود که توابع واقع در محلهای متناظرِ دستگاههای معادلات باید به استثنای یک عامل $\psi(v)$ که برای تمام توابع دستگاه معادلات مشترک است و مستقل از ξ, η, ζ و τ می باشد و فقط به v وابسته است، باهم یکی باشند. بنابراین روابط ذیل را داریم

$$\acute{X} = \psi(v)X, \qquad \acute{L} = \psi(v)L$$
$$\acute{Y} = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right), \qquad \acute{M} = \psi(v)\beta(M + \frac{v}{c}Z)$$
$$\acute{Z} = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right), \qquad \acute{N} = \psi(v)\beta(N - \frac{v}{c}Y)$$

اکنون اگر دو جانبگی این دستگاه معادلات را اجرا کنیم: ابتدا با حل معادلات بدست آمده فوق، سپس با بکاربردن معادلات در تبدیل معکوس (از k به K)، که با سرعت $-v$ توصیف می شود. وقتی که توجه کنیم که دو دستگاه معادلاتی که اینگونه بدست می آیند باید یکسان باشند، نتیجه می شود $\psi(v)\psi(-v) = 1$. بعلاوه بنا بر دلایل ناشی از تقارن[۴]

$$\psi(v) = 1$$

و معادلات ما شکل ذیل را به خود می گیرد

$$\acute{X} = X, \qquad \acute{L} = L$$
$$\acute{Y} = \beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right), \qquad \acute{M} = \beta(M + \frac{v}{c}Z)$$
$$\acute{Z} = \beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right), \qquad \acute{N} = \beta(N - \frac{v}{c}Y)$$

به منظور تفسیر این معادلات، ملاحظات زیر را برقرار می کنیم: فرض کنیم یک بار نقطه ای الکتریکی وقتی در دستگاه ساکن K اندازه گیری می شود، بزرگی "واحد" داشته باشد، یعنی فرض کنیم وقتی در دستگاه ساکن در حال سکون است نیروی یک dyne را روی یک مقدار الکتریسیته مساوی که در فاصله یک سانتیمتر قرار دارد، وارد کند. بنابر اصل نسبیت این بار الکتریکی، هنگامی که در دستگاه متحرک اندازه گیری شود نیز، بزرگی "واحد" دارد. اگر این مقدار الکتریسیته نسبت به دستگاه ساکن در حال سکون باشد، آنگاه بنابر تعریف بردار (X, Y, Z) برابر است با نیروی عمل کننده روی آن. اگر این مقدار الکتریسیته نسبت به دستگاه متحرک ساکن باشد (لااقل در لحظه مورد بحث)، آنگاه نیروی عمل کننده روی آن، اندازه گیری شده در دستگاه متحرک، برابر است با بردار $(\acute{X}, \acute{Y}, \acute{Z})$. نتیجتا سه معادله اول فوق به دو روش زیر، با کلمات، قابل بیانند:

۱. اگر یک واحد بار نقطه ای الکتریکی در یک میدان الکترومغناطیسی در حرکت باشد، علاوه بر نیروی الکتریکی، یک "نیروی محرکه الکتریکی" برآن وارد می شود که اگر از عبارات ضرب شده به توانهای دوم و بالاتر $\frac{v}{c}$

---

[۴] اگر بعنوان مثال $X = Y = Z = L = M = 0$ و $N \neq 0$، آنگاه بنا بر دلایل تقارن واضح است که وقتی v بدون تغییر مقدار عددی تغییر علامت دهد، $\acute{Y}$ نیز باید بدون تغییر مقدار عددی تغییر علامت دهد.

صرفنظر کنیم، با ضرب برداری سرعت بار و نیروی مغناطیسی تقسیم بر سرعت نور برابر است. (روش قدیمی بیان)

۲. اگر یک واحد بار نقطه ای الکتریکی در یک میدان الکترومغناطیسی در حرکت باشد، نیروی عمل کننده روی آن برابر است با نیروی الکتریکی که در محل بار حاضر است، و نیروی الکتریکی که با انتقال [تبدیل] میدان به یک دستگاه مختصات ساکنِ نسبت به بار الکتریکی، معین می شود. (روش جدید بیان)

این مقایسه با "نیروهای محرکه مغناطیسی" وفق می کند. می بینیم که نیروی محرکه الکتریکی در نظریه بسط یافته صرفا نقش یک مفهوم کمکی را دارد، مفهومی که حضورش مدیون وضعیتی است که در آن نیروهای الکتریکی و مغناطیسی بطور مستقل از وضعیت حرکت دستگاه مختصات وجود ندارند.

بعلاوه واضح است که عدم تقارن ذکر شده در مقدمه، که وقتی جریانهای تولید شده بوسیله حرکت نسبی یک مغناطیس و یک رسانا را در نظر می گیریم، نمایان می شود، اکنون ناپدید می شود. علاوه براین سوالات مربوط به "منبع" نیروهای محرکه الکتریکی الکترودینامیکی (ماشینهای تک قطبی) دیگر محلی از اعراب ندارد.

§ ۷. نظریه اصل[اثر] دوپلر و اصل [اثر] ابیراهی

در دستگاه K، خیلی دور از مبدا مختصات، فرض کنید یک منبع امواج الکترودینامیکی وجود داشته باشد که در یک قسمت از فضا، شامل مبدا مختصات، می تواند با درجه تقریب رضایت بخشی بوسیله معادلات ذیل بیان شود

$$X = X_0 \sin\Phi, \qquad L = L_0 \sin\Phi$$
$$Y = Y_0 \sin\Phi, \qquad M = M_0 \sin\Phi$$
$$Z = Z_0 \sin\Phi, \qquad N = N_0 \sin\Phi$$

که درآن

$$\Phi = \omega\left\{t - \frac{1}{c}(lx + my + nz)\right\}$$

اینجا (X_0, Y_0, Z_0) و (L_0, M_0, N_0) بردارهایی هستند که دامنه قطار-موج را تعریف می کنند و l, m, n کسینوسهای هادی عمودهای موج هستند. ما می خواهیم وضعیت طبیعی این امواج را، وقتی که بوسیله یک ناظر ساکن در دستگاه متحرک k بررسی می شود، درک کنیم.

با بکاربردن معادلات تبدیل بدست آمده در § ۶ برای نیروهای الکتریکی و مغناطیسی، و معادلات بدست آمده در § ۳ برای مختصات و زمان، مستقیما بدست می آوریم

$$\acute{X} = X_0 \sin\acute{\Phi}, \qquad \acute{L} = L_0 \sin\acute{\Phi}$$
$$\acute{Y} = \beta(Y_0 - v N_0/c) \sin\acute{\Phi}, \qquad \acute{M} = \beta(M_0 + v Z_0/c) \sin\acute{\Phi}$$
$$\acute{Z} = \beta(Z_0 + v M_0/c) \sin\acute{\Phi}, \qquad \acute{N} = \beta(N_0 - v Y_0/c) \sin\acute{\Phi}$$

$$\acute{\Phi} = \acute{\omega}\left\{\tau - \frac{1}{c}(\acute{l}\xi + \acute{m}\eta + \acute{n}\zeta)\right\}$$

که درآن

$$\acute{\omega} = \omega\beta(1 - l\,v/c)$$

$$\acute{l} = \frac{l - v/c}{1 - l\,v/c}$$

$$\acute{m} = \frac{m}{\beta(1 - l\,v/c)}$$

$$\acute{n} = \frac{n}{\beta(1 - l\,v/c)}$$

از معادله $\acute{\omega}$ نتیجه می شود که اگر یک ناظر با سرعت v نسبت به یک منبع بینهایت دور نور، با فرکانس ν، حرکت کند، بطریقی که خط واصل "منبع–ناظر" زاویه ϕ را با سرعت ناظر، سرعت نسبت به یک دستگاه مختصاتی که نسبت به منبع نور در حال سکون است، بسازد، فرکانس نور $\acute{\nu}$، دریافت شده توسط ناظر با معادله ذیل داده می شود

$$\acute{\nu} = \nu\frac{1 - \cos\phi\,.\,v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

این اصل [اثر] دوپلر است برای هر سرعتی. وقتی $\phi = 0$ باشد، این معادله شکل بدیهی ذیل را به خود می گیرد

$$\acute{\nu} = \nu\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

می بینیم که در تضاد با نگاه متعارف، وقتی $v = -c$، $\acute{\nu} = \infty$.

اگر ما زاویه میان عمود موج (جهت شعاع [نور]) در دستگاه متحرک و خط واصل "منبع–ناظر" را $\acute{\phi}$ بنامیم، معادله $\acute{\phi}$ به شکل ذیل در می آید

$$\cos\acute{\phi} = \frac{\cos\phi - v/c}{1 - \cos\phi\,.\,v/c}$$

این معادله قانون ابیراهی را در کلیترین حالت بیان می کند. اگر $\phi = \frac{1}{2}\pi$، معادله ساده می شود

$$\cos\acute{\phi} = -v/c$$

ما هنوز باید دامنه امواج، آنگونه که در دستگاه متحرک ظاهر می شود، را پیدا کنیم. اگر دامنه نیروی الکتریکی یا مغناطیسی را به صورتی که در به ترتیب دستگاههای ساکن یا متحرک اندازه گیری می شود، A یا $\acute{A}$ بنامیم، بدست می آوریم

$$\acute{A}^2 = A^2\frac{(1 - \cos\phi\,.\,v/c)^2}{1 - v^2/c^2}$$

که این معادله اگر $\phi = 0$ باشد، ساده می شود به

$$\acute{A}^2 = A^2 \frac{1 - v/c}{1 + v/c}$$

از این نتایج استفاده می شود که نسبت به یک ناظر نزدیک شونده به یک منبع نور، با سرعت c، این منبع نور باید با شدت بینهایت ظاهر شود.

§ ۸. تبدیل انرژی شعاعهای نور. نظریه فشار تشعشع اعمال شده روی بازتاب دهندههای کامل

چون $A^2/8\pi$ برابر است با انرژی نور بر واحد حجم، بنابر اصل نسبیت ما باید $\acute{A}^2/8\pi$ را به عنوان انرژی نور در دستگاه متحرک در نظر بگیریم. لذا اگر حجم یک مجموعه نور یکسان می بود، $\acute{A}^2/A^2$، نسبت انرژی یک مجموعه نور داده شده "اندازه گیری شده در حرکت" به "اندازه گیری شده در سکون" میشد، بسته به اینکه در K یا k اندازه گیری شود. اما اینجا اینگونه نیست. اگر l, m, n کسینوسهای هادی عمودهای موج نور در دستگاه ساکن باشند، هیچ انرژیی از المانهای سطح یک سطح کروی که با سرعت نور حرکت می کند عبور نمی کند:

$$(x - lct)^2 + (y - mct)^2 + (z - nct)^2 = R^2$$

بنابراین ما می توانیم بگوییم که این سطح دائما یک مجموعه نور واحد را محصور می کند. [اکنون] درباره مقدار انرژی محصور شده در این سطح، مشاهده شده در دستگاه k، کاوش می کنیم، یعنی درباره انرژی مجموعه نور نسبت به دستگاه k.

سطح کروی، با مشاهده در دستگاه متحرک، یک سطح بیضوی است که معادله آن در زمان $\tau = 0$ برابر است با

$$(\beta\xi - l\beta\xi\, v/c)^2 + (\eta - m\beta\xi\, v/c)^2 + (\zeta - n\beta\xi\, v/c)^2 = R^2$$

اگر S حجم کره باشد و $\acute{S}$ حجم بیضوی، آنگاه با یک محاسبات ساده

$$\frac{\acute{S}}{S} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \cos\phi \, . \, v/c}$$

بنابراین اگر انرژی محصور شده در این سطح را هنگامی مه در دستگاه ساکن اندازه گیری شود E و هنگامی که در دستگاه متحرک اندازه گیری شود $\acute{E}$ بنامیم، بدست می آوریم

$$\frac{\acute{E}}{E} = \frac{\acute{A^2}\acute{S}}{A^2 S} = \frac{1 - \cos\phi \, . \, v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

و این فرمول وقتیکه $\phi = 0$ باشد ساده می شود

$$\frac{\acute{E}}{E} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

قابل ذکر است که تغییر انرژی و فرکانس یک مجموعه نور بهمراه وضعیت حرکت ناظر، بر اساس یک قانون است.

اکنون فرض کنیم که صفحه مختصات $\xi = 0$ یک سطح بازتابش کامل باشد که روی آن امواج مسطح بحث شده در § ۷ بازتابیده می شوند. ما بدنبال فشار نور اعمال شده روی سطح بازتابش و جهت، فرکانس و شدت نور بعد از انعکاس هستیم.

فرض کنیم که یک نور با مقادیر $A, \cos\phi\,, \nu$ (با ارجاع به دستگاه K) معین شود. با مشاهده از k مقادیر متناظر برابر است با

$$\acute{A} = A\frac{1-\cos\phi\,.\,v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\cos\acute{\phi} = \frac{\cos\phi - v/c}{1-\cos\phi\,.\,v/c}$$

$$\acute{\nu} = \nu\frac{1-\cos\phi\,.\,v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

برای نور بازتابیده شده، با ارجاع فرآیند به دستگاه k، بدست می آوریم

$$\acute{\acute{A}} = \acute{A}$$

$$\cos\acute{\acute{\phi}} = -\cos\acute{\phi}$$

$$\acute{\acute{\nu}} = \acute{\nu}$$

در آخر با تبدیل و بازگشت به دستگاه ساکن K، برای نور بازتابیده داریم

$$\acute{\acute{\acute{A}}} = \acute{\acute{A}}\frac{1+\cos\acute{\acute{\phi}}\,.\,v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = A\frac{1-2\cos\phi\,.\,v/c+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}$$

$$\cos\acute{\acute{\acute{\phi}}} = \frac{\cos\acute{\acute{\phi}} + v/c}{1+\cos\acute{\acute{\phi}}\,.\,v/c} = -\frac{(1+v^2/c^2)\cos\phi - 2\,v/c}{1-2\cos\phi\,.\,v/c+v^2/c^2}$$

$$\acute{\acute{\acute{\nu}}} = \acute{\acute{\nu}}\frac{1+\cos\acute{\acute{\phi}}\,.\,v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \nu\frac{1-2\cos\phi\,.\,v/c+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}$$

انرژیی (اندازه گیری شده در دستگاه K) که در واحد زمان با واحد سطح آینه برخورد می کند آشکارا برابر است با $A^2(c\cos\phi - v)/8\pi$ انرژیی که در واحد زمان واحد سطح آینه را ترک می کند برابر است با $\acute{\acute{\acute{A}}}^2(-c\cos\acute{\acute{\acute{\phi}}} + v)/8\pi$.

اختلاف این دو عبارت، بنابر اصل [تعریف] انرژی، برابر است با کار انجام شده بوسیله فشار نور در واحد زمان. اگر

ما این کار مساوی با حاصل ضرب Pv در نظر بگیریم که درآن P فشار نور می باشد، بدست می آوریم

$$P = 2.\frac{A^2}{8\pi}\frac{(\cos\phi - v/c)^2}{1 - v^2/c^2}$$

در توافق با تجربه و نظریه های دیگر، با تقریب مرتبه اول بدست می آوریم

$$P = 2.\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\phi$$

همه مسایل در حوزه اجسام متحرک با روشی که اینجا بکار برده شد قابل حل است. آنچه که مهم است اینست که نیروی الکتریکی و مغناطیسی نور که بوسیله یک جسم متحرک تحت تاثیر قرار می گیرد، تبدیل [منتقل] شود به یک دستگاه مختصاتی که نسبت به جسم در سکون است. با این طریق همه مسایل در نورشناسی اجسام متحرک به یک سری از مسایل در نورشناسی اجسام ساکن تقلیل می یابد.

§ ۹. تبدیل معادلات ماکسول-هرتز وقتی که جریانهای جابجایی در نظر گرفته شوند

با معادلات ذیل شروع می کنیم

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial X}{\partial t} + u_x\rho\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y}{\partial t} + u_y\rho\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Z}{\partial t} + u_z\rho\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

که در آن

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

بیانگر 4π ضرب در شدت الکتریسیته و (u_x, u_y, u_z)، بردار سرعت جسم باردار می باشد. اگر تصور کنیم که بارهای الکتریکی به طور ثابت با اجسام صلب کوچک (یونها، الکترونها) جفت شوند، این معادلات، مبنای الکترومغناطیسی الکترودینامیک و نورشناسی لورنتسی اجسام متحرک هستند.

فرض کنیم این معادلات در دستگاه K معتبر باشند و با کمک معادلات تبدیل داده شده در § ۳ و § ۶، آنها را به دستگاه k تبدیل کنیم. در این صورت ما معادلات ذیل را بدست می آوریم

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial X'}{\partial \tau} + u_\xi\rho'\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y'}{\partial \tau} + u_\eta\rho'\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \acute{Z}}{\partial \tau}+u_\zeta \acute{\rho}\right\}=\frac{\partial \acute{M}}{\partial \xi}-\frac{\partial \acute{L}}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \acute{N}}{\partial \tau}=\frac{\partial \acute{X}}{\partial \eta}-\frac{\partial \acute{Y}}{\partial \xi}$$

که در آن

$$u_\xi=\frac{u_x-v}{1-u_x\,v/c^2}$$

$$u_\eta=\frac{u_y}{\beta(1-u_x\,v/c^2)}$$

$$u_\zeta=\frac{u_z}{\beta(1-u_x\,v/c^2)}$$

و

$$\acute{\rho}=\frac{\partial \acute{X}}{\partial \xi}+\frac{\partial \acute{Y}}{\partial \eta}+\frac{\partial \acute{Z}}{\partial \zeta}$$

$$=\beta(1-u_x v/c^2)\rho$$

چون، همان گونه که از قضیه جمع سرعت ها در § ۵ نتیجه می شود، بردار (u_ξ, u_η, u_ζ) چیزی جز سرعت بار الکتریکی نیست که در دستگاه k اندازه گیری شده است، بر مبنای اصول سینماتیک مان، ما اثبات این مطلب را که، بنیان الکترودینامیکی نظریه الکترودینامیک اجسام متحرک لورنتس با اصل نسبیت توافق دارد، را داریم.

بعلاوه شایسته است بطور خلاصه تذکر دهم که قانون مهم زیر می تواند به سادگی از معادلات بسط داده شده استنتاج شود: اگر یک جسم دارای بار الکتریکی در هر جای فضا در حرکت باشد و وقتی از یک دستگاه مختصاتی که به همراه جسم حرکت می کند نگریسته شود بار آن تغییر نمی کند، وقتی از دستگاه "ساکن" K نیز نگریسته شود بار آن ثابت می ماند.

§ ۱۰. دینامیک الکترون به آهستکی شتاب گرفته

فرض کنیم در یک میدان الکترومغناطیسی، یک ذره باردار الکتریکی (که نهایتا یک "الکترون" نامیده می شود)، در حرکت باشد، برای قانون حرکت آن به صورت زیر پیش می رویم:

اگر الکترون در یک آنِ مورد نظر در حال سکون باشد، حرکت الکترون در لحظه بعدی زمان مطابق معادلات زیر ادامه می یابد

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\epsilon X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\epsilon Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\epsilon Z$$

که در آن x, y, z بیانگر مختصات الکترون و m، جرم الکترون است، مادام که سرعت آن آهسته است.

اکنون فرض کنید سرعت الکترون در یک آنِ مورد نظر v باشد. ما قانون حرکت الکترون را در لحظات بلافاصله بعدی زمان، جستجو می کنیم.

بدون بهم زدن ساختار کلی ملاحظات مان، ما می توانیم فرض کنیم و چنین می کنیم، که الکترون در لحظه ای که مورد توجه ماست در مبدا مختصات قرار دارد و با سرعت v بر روی محور X دستگاه K حرکت می کند. واضح است که در لحظه داده شده ($t = 0$)، الکترون نسبت به یک دستگاه مختصاتی که در حرکت موازی، با سرعت v، در امتداد محور X است، در حال سکون است.

از فرض فوق، به همراه اصل نسبیت، واضح است که در زمان بلافاصله بعدی (برای مقادیر کوچک t)، الکترون، با مشاهده از دستگاه k، مطابق با معادلات زیر حرکت می کند

$$m\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \epsilon \acute{X}$$

$$m\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \epsilon \acute{Y}$$

$$m\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \epsilon \acute{Z}$$

که در آن نمادهای $\xi, \eta, \zeta, \acute{X}, \acute{Y}, \acute{Z}$ به دستگاه k اشاره دارند. بعلاوه اگر حکم کنیم که وقتی $t = x = y = z = 0$، آنگاه $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$، معادلات تبدیل § ۳ و § ۶ معتبر است، بطوری که داریم

$$\xi = \beta(x - vt), \eta = y, \zeta = z, \tau = \beta(t - vx/c^2)$$

$$\acute{X} = X, \acute{Y} = \beta(Y - v\,N/c), \acute{Z} = \beta(Z + v\,M/c)$$

با کمک این معادلات، ما معادلات حرکت فوق را از دستگاه k به دستگاه K تبدیل می کنیم و بدست می آوریم

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\epsilon}{m\beta^3}X \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\epsilon}{m\beta}\left(Y - \frac{v}{c}N\right) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\epsilon}{m\beta}\left(Z + \frac{v}{c}M\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

با تبعیت از زاویه نگاه معمولی، اکنون ما در مورد جرم "طولی" و "عرضی" الکترون متحرک تحقیق می کنیم.
معادلات (A) را به شکل ذیل می نویسیم

$$m\beta^3\frac{d^2x}{dt^2}=\epsilon X \qquad\qquad =\epsilon \acute{X}$$

$$m\beta^2\frac{d^2y}{dt^2}=\epsilon\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)=\epsilon\acute{Y}$$

$$m\beta^2\frac{d^2z}{dt^2}=\epsilon\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)=\epsilon\acute{Z}$$

و در ابتدا تذکر می دهیم که $\epsilon\acute{X},\epsilon\acute{Y},\epsilon\acute{Z}$ مولفه های نیروی پاندروموتیو عمل کننده روی الکترون می باشند و مضافا که این مولفه ها در یک دستگاهی که الان با الکترون حرکت می کند، با همان سرعت الکترون، مشاهده می شوند. (این نیرو می تواند به عنوان مثال، با یک نیرو سنج فنری در دستگاه اخیر [متحرک]، اندازه گیری شود). حال اگر ما این نیرو را بطور ساده "نیروی عمل کننده روی الکترون" بنامیم، و معادله، جرم × شتاب = نیرو، را حفظ کنیم و اگر همچنین حکم کنیم که شتابها در دستگاه ساکن K اندازه گیری شوند، از معادلات فوق استخراج می کنیم

$$\text{جرم طولی}=\frac{m}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3}$$

$$\text{جرم عرضی}=\frac{m}{1-v^2/c^2}$$

با یک تعریف متفاوت از نیرو و شتاب، طبیعتا ما باید مقادیر دیگری برای جرمها بدست بیاوریم. این به ما نشان می دهد که در مقایسه نظریه های مختلف حرکت الکترون ما باید خیلی با احتیاط پیش برویم.

یادآوری می کنیم که این نتایج در باره جرم، درباره نقاط مادی قابل سنجش نیز معتبرند، زیرا یک نقطه مادی قابل سنجش می تواند (بنا بر درک ما از جهان)، از یک الکترون به اضافه یک بار الکتریکی تشکیل شود، *کوچکی آن اهمیتی ندارد*.

ما اکنون انرژی جنبشی الکترون را محاسبه خواهیم کرد. اگر یک الکترون از حال سکون، از مبدا مختصات دستگاه K، در امتداد محور X، تحت اثر یک نیروی الکترواستاتیک X، حرکت کند، واضح است که انرژی جدا شده از میدان الکترواستاتیک مقدار $\int \epsilon X dx$ را دارد. از آنجا که الکترون به آهستگی شتاب می گیرد و در نتیجه نمی تواند هیچ انرژیی به شکل تشعشع از دست بدهد، انرژی جدا شده از میدان الکترواستاتیک باید مساوی با انرژی حرکت [جنبشی] الکترون، W، در نظر گرفته شود. با در نظر داشتن این که در طی کل فرآیند حرکت در حال بررسی ما، اولینِ معادلات (A) بکار می رود، ددست می آوریم

$$W=\int \epsilon X dx = m\int \beta^3 v dv$$

$$=mc^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right\}$$

بنابر این وقتی $v=c$، W بی نهایت می شود. سرعتهای بزرگتر از سرعت نور، همانند نتایج قبلی ما، امکان وجود ندارند.

این عبارت برای انرژی جنبشی همچنین باید، بنا بر استدلال بیان شده فوق، برای جرمهای قابل سنجش نیز بکار رود.

ما اکنون خواص حرکت الکترونی را که از دستگاه معادلات (A) ناشی می شود و قابل دسترس با آزمایش هستند را بر خواهیم شمرد.

۱. از دومین معادله دستگاه (A) نتیجه می شود که یک نیروی الکتریکی Y و یک نیروی مغناطیسی N، یک کنش منحرف کننده با قوت مساوی بر روی الکترون متحرک با سرعت v دارند، اگر $Y = Nv/c$. لذا می بینیم که بر اساس نظریه ما امکان پذیر است که سرعت الکترون را از روی نسبت توان انحراف مغناطیسی A_m به توان انحراف الکتریکی A_e، برای هر سرعتی، محاسبه کنیم، با بکار بردن قانون

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{c}$$

این رابطه می تواند بطور تجربی آزمایش شود، زیرا سرعت الکترون می تواند مستقیما اندازه گیری شود، برای مثال بوسیله میدان های الکتریکی و مغناطیسی با نوسان سریع.

۲. با قیاس با انرژی جنبشی الکترون نتیجه می شود که میان اختلاف پتانسیل طی شده P، و سرعت کسب شده v، توسط الکترون، باید رابطه ذیل برقرار باشد

$$P = \int X dx = \frac{m}{\epsilon} c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} - 1 \right\}$$

۳. ما شعاع انحنای مسیر یک الکترون را وقتی که یک نیروی مغناطیسی N حضور داشته باشد (به عنوان تنها نیروی منحرف کننده) و عمود بر سرعت الکترون باشد، محاسبه می کنیم. از دومین معادلات (A) بدست می آوریم

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\epsilon}{m} \frac{v}{c} N \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

یا

$$R = \frac{mc^2}{\epsilon} \cdot \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{N}$$

این سه رابطه، با نظریه ای که در اینجا ارتقا داده شده، یک بیان کامل برای قوانینی که مطابق آنها یک الکترون باید حرکت کند، می باشند.

در خاتمه میل دارم بیان کنم که در اثناء کار بر روی مسئله ای که در اینجا بررسی شد، من همیاری صادقانه دوست و همکارم M. Besso را داشته ام و اینکه من برای چندین پیشنهاد ارزنده به او مدیونم.

درباره این مقاله

این ویرایش از مقاله انشتین، در باره الکترودینامیک اجسام متحرک، بر مبنای ترجمه انگیسی مقاله اصلی او به زبان آلمانی در ۱۹۰۵ (که تحت عنوان Zur Elektrodynamik bewegter K¨orper، در Annalen der Physik. 17:891, 1905 انتشار یافت) می باشد که در کتاب The Principle Of Relativity، منتشر شده در ۱۹۲۳ توسط Methuen and Company, Ltd. Of London، آمده است. اغلب مقالات آن مجموعه ترجمه های انگلیسی متن آلمانی Das Relativatsprinzip, 4th ed.، منتشر شده در ۱۹۲۲ توسط Tuebner می باشد. همه این منابع اکنون دارای حق چاپ همگانی (public domain) می باشند؛ این مقاله، که از آن مجموعه استخراج شده است، دارای حق چاپ همگانی بوده و می تواند به هر طریقی بدون مجوز، محدودیت، اسناد و یا مابازای، باز نشر گردد.

پاورقی های شماره دار همانند ویرایش ۱۹۲۳ می باشند؛ یادداشت های ویرایش گر با علامت † و با فونت sans serif در پاورقی ها مشخص شده اند (در این ترجمه فارسی این پاورقی ها نیامده اند. به اصل مقاله انگلیسی در آدرس زیر مراجعه نمایید). در ترجمه انگلیسی ۱۹۲۳ نشانه گذاری مورد استفاده قرار گرفته در مقاله ۱۹۰۵ انشتین جهت هماهنگی با نشانه گذاری دهه ۱۹۲۰ اصلاح گردید؛ به عنوان مثال، c بیانگر سرعت نور است، در حالی که انشتین در ۱۹۰۵ از V استفاده کرده است.

این ویرایش توسط John Walker تهیه گردیده است. ویرایش حاضر از این سند به فرمت های مختلف در وب سایت ویرایشگر در دسترس می باشد:

http://www.fourmilab.ch